

関数 $y = f(x)$ は、媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

のように表すことができます。これを先の公式に当てはめると、

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

となりますから、次のことが成り立ちます。

◇ 曲線の長さ② ◇

$$a < b \text{ のとき, } s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

例題

曲線 $y = \log(1 - x^2)$ の $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の部分の長さを求めよ。

$$f(x) = \log(1 - x^2) \text{ とおくと, } f'(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$$

$$\text{ここで, } 1 + \{f'(x)\}^2 = \left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^2$$

よって求める長さは

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - 1 \right) dx && \dots \text{部分分数に分解} \\ &= \left[-\log|1 - x| + \log|1 + x| - x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \log 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

曲線の長さは、理論上は上のような公式で計算できるのですが、実際のところ公式の中にある $\sqrt{\quad}$ のせいで、積分の計算ができる曲線は非常に限られています。

例えば普通の2次関数や1次関数ですら、まともに計算することができない場合もあります。そのため、曲線の長さを求める問題は、あまりパターンが多くない、といえます。