

パスカルの三角形

2つの項を累乗するとき、展開式は次のようになっている。

$$(a+b)^0 = 1 \cdots (\text{と約束する})$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

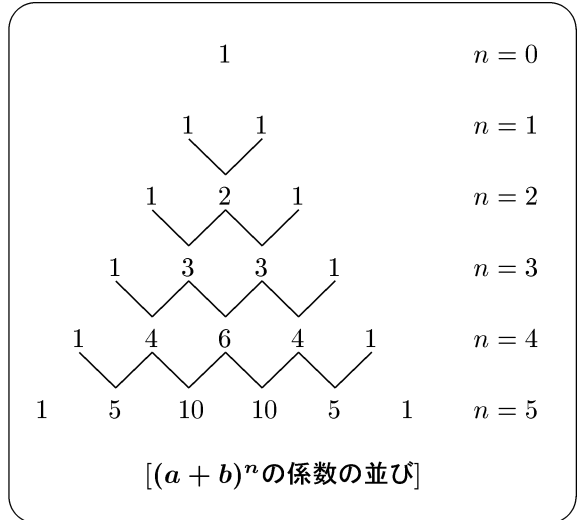
$$(a+b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a+b)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a+b)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

これらの展開式に現れる係数を順に並べると、図のようなきれいな規則の三角形ができる。

このような三角形を、
 _____ という。



二項定理

$(a+b)^4$ を展開することを考えよう。

$$(a+b)^4 = \underset{\textcircled{1}}{(a+b)} \underset{\textcircled{2}}{(a+b)} \underset{\textcircled{3}}{(a+b)} \underset{\textcircled{4}}{(a+b)}$$

展開とは、上の①～④のかっこの中からそれぞれ a , b のどちらかを選び、選ばれた4つの文字を掛け合わせる作業のことである。
 例えば、

①から a , ②から a , ③から a , ④から b

のように選んで掛けた場合は, $aaab$, つまり, 「 a^3b 」という項ができる。

「 a^3b 」という項ができる選び方は、右表の4通りある。だから、 $(a+b)^4$ を展開すると $4a^3b$ という項が出てくるのである。

①	②	③	④	
a	a	a	b	$= a^3b$
				$= a^3b$
				$= a^3b$
				$= a^3b$

「4通り」となる理由は、次のようにも説明できる。

$$\textcircled{1}\sim\textcircled{4}\text{の4つの場所から、}b\text{をとる場所を1つ選ぶから、}{}_4C_1 = 4$$

(①～④の4つの場所から、 a をとる場所を3つ選ぶから、 ${}_4C_3 = 4$ と考えても同じこと)

この考え方により、 a^3b の係数は ${}_4C_1$ であると言えるし、他の場合についても

$$a^2b^2\text{の係数は } \square C \square = \underline{\hspace{1cm}}, \quad a^4\text{の係数は } \square C \square = \underline{\hspace{1cm}}$$

といえる。

また、 $(a+b)^8$ を展開したときの、 a^5b^3 の係数は $\square C \square = \underline{\hspace{1cm}}$ である。

一般に、 $(a+b)^n$ を展開するとき、 $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_nC_r$ となる。これをまとめた次の定理を二項定理という。

● 二項定理 ●

$$(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n$$

二項定理の各項の係数 ${}_n C_0, {}_n C_1, {}_n C_2, \dots, {}_n C_r, \dots, {}_n C_{n-1}, {}_n C_n$ を _____ という。

また、上の下線部 ${}_n C_r a^{n-r} b^r$ を $(a + b)^n$ の展開式の _____ という。

問題1 次の式を展開せよ。

(吉教科書 p.91 問6)

(1) $(x - y)^6$

(2) $(x + 2y)^5$

(3) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^6$

問題2 次の式の展開式において、[] に示した項の係数を求めよ。

(吉教科書 p.91 問7)

(1) $(2x^3 + 3y)^6$ [$x^6 y^4$]

(2) $(2x^3 - x)^7$ [x^9]

● $(a + b + c)^n$ の展開式 ●

$(a + b + c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし, } p + q + r = n$$

問題3 次の問いに答えよ。

(吉教科書 p.92 問8, 練習4)

(1) $(a + b + c)^{10}$ の展開式における $a^2 b^5 c^3$ の係数を求めよ。

(2) $(x^2 + x + 1)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。