剰余の定理

x についての整式を $P(x)$，$Q(x)$ などと表し，整式 $P(x)$ の x に数 a を代入したときの式の値を $P(a)$ とかく。

Q. 「x についての整式」とは何か？

____

例 1 $P(x) = x^3 - 5x + 6$ について，

$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 6 = 4$,

$P(-1) =$ ______________　　$P(i) =$ ______________

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - a$ で割り算したときの余りについて考えよう。

$P(x)$ を $x - a$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とおくと，次の関係式が成り立つ。

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R \qquad \cdots ①$$

①の式の x 全てに，a を代入すると，$P(a) = (a - a)Q(a) + R = 0 + R = R$

このことから，$P(x)$ を $x - a$ で割った余り R は $P(a)$ である，といえる。

● 剰余の定理 ●

整式 $P(x)$ について，

$P(x)$ を $x - a$ で割った余りは $P(a)$ である

例 2

$P(x) = x^3 - 5x + 6$ を　$x - 3$ で割った余りは $P(3) =$ ______________

$x + 1$ で割った余りは $P(-1) =$ ______________

$P(x) = x^3 + 3x - 2x + 5$ を　$x - 2$ で割った余りは $P($　　$) =$ ______________

$x + 4$ で割った余りは $P($　　$) =$ ______________

問題 1 $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ を次の式で割ったときの余りを求めよ。　(吉教科書 p.82　問 21)

(1) $x - 1$　　(2) $x - 2$　　(3) $x + 1$　　(4) $x + 2$

剰余の定理は，さらに次のように一般化できる。

● 剰余の定理 (2) ●

整式 $P(x)$ について，

$$\boldsymbol{P(x)}\ \textbf{を}\ \boldsymbol{ax+b}\ \textbf{で割った余りは}\ \boldsymbol{P\left(-\frac{b}{a}\right)}\ \textbf{である}$$

※証明せよ　(吉教科書 p.83　問 22)

問題2　$P(x)=4x^3-3x+1$ を次の式で割ったときの余りを求めよ。　(吉教科書 p.83　問 23)

(1) $2x+1$　　(2) $3x-2$

$P(x)$ を $x-a$ で割った余りが 0 ならば，$P(x)$ は $x-a$ で割り切れる。つまり，次のことがいえる。

● 因数定理 重要 ●

$$\boldsymbol{x-a}\ \textbf{が，整式}\ \boldsymbol{P(x)}\ \textbf{の因数}\quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{P(a)=0}$$

例 3　$P(x)=x^3+x^2-3x-6$ について，

$P(2)=2^3+2^2-3\cdot2-6=0$ だから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

つまり，$P(x)=(x-2)(\qquad\qquad)$ という形に因数分解されるはずである。

問題3　因数定理を利用して，次の式を因数分解せよ。　(吉教科書 p.83　問 25)

(1) x^3-3x^2+4　　(2) $x^3-6x^2+11x-6$　　(3) $2x^3-7x^2+9$