数学牧場

log の桁数問題

△▼△

桁数の原則

自然数 N について，$\mathbf{10^{n-1} \leqq N < 10^{n} \iff N}$ **は** $\boldsymbol{n}$ **桁**

実数 M について，$\mathbf{10^{-n} \leqq M < 10^{-(n-1)} \iff M}$ **の小数第** $\boldsymbol{n}$ **位** に初めて 0 でない数が現れる

2^{100} や 3^{50} のように計算することが困難な数でも，10 の累乗ではさむことができれば桁数が分かる。そこで，$\log_{10}$ を用いた計算を行う。例えば 2^{100} について，$\log_{10} 2^{100}$ を計算すると，

$$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10 \quad \rightarrow \quad \therefore 2^{100} = 10^{30.10}$$

$10^{30.10}$ は 10^{30} と 10^{31} の間の数であるから，2^{100} も 10^{30} と 10^{31} の間の数である。つまり $10^{30} \leqq 2^{100} < 10^{31}$ と「はさむ」ことができるから，2^{100} は 31 桁の整数だということが分かる。

小数についても同様である。2^{-100} はとても小さな数であり，小数に直すと $0.00000\cdots$ のように，いくつも 0 が並ぶ。「初めて 0 でない数が現れるのは小数第何位か」を調べるときも，$\log_{10}$ を用いて計算する。

$$\log_{10} 2^{-100} = -100 \log_{10} 2 = -100 \times 0.3010 = -30.10 \quad \rightarrow \quad \therefore 2^{-100} = 10^{-30.10}$$

$10^{-30.10}$ は 10^{-31} と 10^{-30} の間の数であるから，2^{-100} も 10^{-31} と 10^{-30} の間の数である。つまり $10^{-31} \leqq 2^{100} < 10^{-30}$ と「はさむ」ことができるので，2^{-100} は小数第 31 位に初めて 0 でない数が現れる小数だと分かる。

問題1 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 3^{40} は何桁の数か。

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。

(3) 6^n が 10 桁の数であるとき，自然数 n の値を求めよ。

最高位の数

大きな数の最高位の数を調べるときは，

$5348100000 = \underline{5.3481} \times 10^{9} \cdots ①$　　$2056200000000000 = \underline{2.0562} \times 10^{14} \cdots ②$

のように，$\underline{A} \times 10^{\square}$ という形で書くと，A の部分に最高位の数が現れてくる。すなわち，

①の場合は，$A = 5.3481$ だから，$5 \leqq A < 6$ で，最高位の数は 5
②の場合は，$A = 2.0562$ だから，$2 \leqq A < 3$ で，最高位の数は 2　であると説明できる。

● 最高位の数 ●

$\boldsymbol{N = A \times 10^{\square}}$ $(0 < A < 10)$ について，$\boldsymbol{n \leqq A < n+1}$ **ならば，**$\boldsymbol{N}$ **の最高位の数は** $\boldsymbol{n}$

例 1 先ほど確認した通り，$2^{100} = 10^{30.10}$ である。これをさらに細かく分けると

$$2^{100} = 10^{30+0.10} = \underline{10^{0.10}} \times 10^{30} \qquad \therefore A = 10^{0.30}$$

ここで，$1 = 10^{0}$，また $\log_{10} 2 = 0.3010$ より，$2 = 10^{0.3010}$ であるから，$1 < 10^{0.10} < 2$
すなわち，$1 < A < 2$ となるから，2^{100} の最高位の位は 1 である。

※ $\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 4 = 0.6020$，$\log_{10} 5 = 0.6990$，$\cdots$ より，$3 = 10^{0.4771}$，$4 = 10^{0.6020}$，$5 = 10^{0.6990}$，$\cdots$
実際の問題ではこれらを利用して，A がどの数の間にあるのかを判断する。

問題2 3^{100} の最高位の位の数を求めよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

一の位の数

大きな数について，一の位の数を考えるときは，指数の規則性を利用する。例えば 3^{100} について

$3^1 = \mathbf{3}$　，　$3^2 = \mathbf{9}$　，　$3^3 = 2\mathbf{7}$　，　$3^4 = 8\mathbf{1}$
$3^5 = 24\mathbf{3}$　，　$3^6 = 72\mathbf{9}$　，　$3^7 = 218\mathbf{7}$　，　$3^8 = 656\mathbf{1}$
$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$

「4 の倍数乗」のとき，1 の位は「1」になることが分かるので，3^{100} の 1 の位は「1」である。

問題3 2^{2014} の最高位の位の数を求めよ。