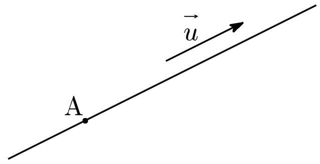
直線の方程式



点 A$(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{u}$ に平行な**直線のベクトル方程式**は，直線上の勝手な点 P$(\vec{p})$ に対して

$$\boxed{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}} \quad \cdots ①$$

と表される。これは平面でも空間でも成り立つことである。

ここで P$(x,\ y)$，A$(x_1,\ y_1)$，$\vec{u} = (m,\ n)$ とおき，①に代入すると

$$(x,\ y) = (x_1,\ y_1) + t(m,\ n) \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases}$$

という，媒介変数表示が得られ，これから t を消去することで

$$(t =)\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \qquad \therefore\ y - y_1 = \frac{n}{m}(x - x_1)$$

という，いわゆる**平面における直線の方程式**が得られる。(ただし，$m \neq 0$，$n \neq 0$)

上の P，A，$\vec{u}$ を空間座標，空間ベクトルで与えてみよう。
平面において P$(x,\ y,\ z)$，A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{u} = (l,\ m,\ n)$ とおき，①に代入すると

$$(x,\ y,\ z) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + t(l,\ m,\ n) \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$

という，媒介変数表示が得られる。t を消去すると

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

という関係式が得られる。(ただし $l \neq 0$，$m \neq 0$，$n \neq 0$)
これを**空間における直線の方程式**という。

● 空間における直線の方程式 ●

点 A$(a,\ b,\ c)$ を通り，$\vec{u} = (l,\ m,\ n)$ に平行な直線の方程式は

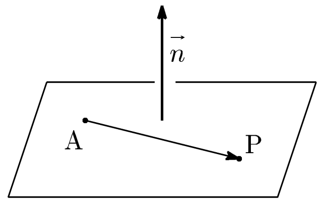
$$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}$$

ただし $l \neq 0$，$m \neq 0$，$n \neq 0$

※ l，m，n のいずれかが 0 のときはどうすればよいか？

平面の方程式

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面は 1 つに定まる。この平面のベクトル方程式は容易に作ることができる。



平面上の勝手な点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$.

つまり，$(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot \vec{n} = 0$

よって，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面のベクトル方程式は

$$\boxed{\boldsymbol{(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0}}$$

となる。

ここで，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおき，上のベクトル方程式に代入すると

$$\{(x,\ y,\ z) - (x_1,\ y_1,\ z_1)\} \cdot (a,\ b,\ c) = 0$$
$$\therefore a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

これを，**空間における平面の方程式**という。

● 空間における平面の方程式 ●

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式は

$$\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

上の式を展開すると $ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = 0$ となり，$-ax_1 - by_1 - cz_1$ は定数であるから d とおくと，

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

という形に整理できる。これを平面の方程式の**一般形**という。

問題1 xyz-空間において，次の直線や平面の方程式を求めよ。

(1) 点 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ -4)$ を通り，$\vec{u} = (2,\ -1,\ 5)$ に平行な直線

(2) 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 4,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ 0,\ -1)$ を通る直線

(3) 点 $\mathrm{A}(5,\ 2,\ -1)$ を通り，$\vec{n} = (1,\ 1,\ 3)$ に垂直な平面

問題2 3 点 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ -2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0,\ 9)$ について，次の問いに答えよ。

(1) A，B，C を通る平面 α の方程式を求めよ。また，この平面に垂直なベクトルを 1 つ言え。

(2) 点 $\mathrm{D}(5,\ 3,\ 1)$ を通り，平面 α に垂直な直線 l の方程式を求めよ。

(3) 直線 l と平面α との交点の座標を求めよ。

(4) 点 D と平面 α との距離を求めよ。