応用問題に挑戦

数B　数学的帰納法

■1　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定し，それが正しいことを証明しなさい。

$a_1=\dfrac{1}{2}$，　$a_2=\dfrac{1}{2-a_1}=\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$，　$a_3=\dfrac{1}{2-a_2}=\dfrac{1}{2-\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$

これより、$a_n=\dfrac{n}{n+1}$ だと推定される。これを証明する。

(証)(I) $n=1$ のとき、$a_1=\dfrac{1}{2}$ より成り立つ。

(II) $n=k$ のとき、成り立つと仮定すると $a_k=\dfrac{k}{k+1}$

元の漸化式より $a_{k+1}=\dfrac{1}{2-a_k}$ なので

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-\frac{k}{k+1}}=\frac{k+1}{2(k+1)-k}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I)(II) より、推定は正しく、$a_n=\dfrac{n}{n+1}$ である。

■2　$a>0$，$b>0$ のとき，任意の自然数 n について，不等式 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n\leqq\dfrac{a^n+b^n}{2}$ が成立することを数学的帰納法によって証明しなさい。

(I) $n=1$ のとき、(左辺)＝(右辺) となり、成り立つ。

(II) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k\leqq\dfrac{a^k+b^k}{2}$

両辺を $\dfrac{a+b}{2}$ 倍すると、$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}\leqq\left(\dfrac{a^k+b^k}{2}\right)\cdot\dfrac{a+b}{2}$

$$=\frac{1}{4}(a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1})\cdots①$$

ここで、$\dfrac{1}{4}(a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1})$ と $\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ の大小を比べる。

$$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}-\frac{1}{4}(a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1})=\frac{1}{4}(a^{k+1}-a^kb-ab^k+b^{k+1})$$

$$=\frac{1}{4}\{a^k(a-b)-b^k(a-b)\}$$

$$=\frac{1}{4}(a-b)(a^k-b^k)$$

($a>0$, $b>0$ より) これは、$a<b$ のときも $a>b$ のときも正となり、

$a=b$ のとき 0 となるから、$\dfrac{1}{4}(a^{k+1}+a^kb+ab^k+b^{k+1})\leqq\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ …②

①②より、$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}\leqq\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

(I)(II) より、任意の自然数について成り立つ。